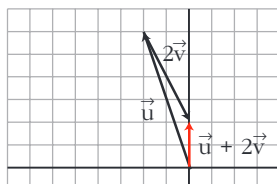


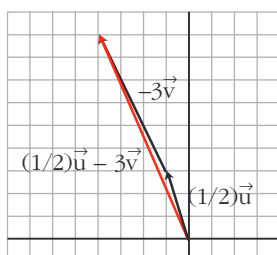
AUTOEVALUACIÓN

1. Se consideran los vectores $\vec{u}(-2, 6)$ y $\vec{v}(1, -2)$.

Calcula $\vec{u} + 2\vec{v}$ y $\frac{1}{2}\vec{u} - 3\vec{v}$ gráficamente y utilizando coordenadas.



$$\begin{aligned}\vec{u} + 2\vec{v} &= (-2, 6) + 2(1, -2) = \\ &= (-2, 6) + (2, -4) = (0, 2)\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\vec{u} - 3\vec{v} &= \frac{1}{2}(-2, 6) - 3(1, -2) = \\ &= (-1, 3) - (3, -6) = (-4, 9)\end{aligned}$$

2. Sean \vec{u} y \vec{v} dos vectores unitarios que forman un ángulo de 60° . Calcula:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ b) $(3\vec{u}) \cdot (-2\vec{v})$ c) $\text{proy}_{\vec{u}}(\vec{u} + \vec{v})$

$$\text{a) } \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos 60^\circ = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{b) } 3\vec{u} \cdot (-2\vec{v}) = -6(\vec{u} \cdot \vec{v}) = -3$$

$$\text{c) } \text{proy}_{\vec{u}}(\vec{u} + \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v})}{|\vec{u}|} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v}}{1} = |\vec{u}|^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

3. Expresa el vector $\vec{a}(-1, -9)$ como combinación lineal de la base $B = \{(-2, 3), (-1, 5)\}$.

$$(-1, -9) = k(-2, 3) + s(-1, 5) = (-2k - s, 3k + 5s)$$

$$\begin{cases} -1 = -2k - s \\ -9 = 3k + 5s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = 1 - 2k \\ -9 = 3k + 5(1 - 2k) \end{cases} \Rightarrow -9 = -7k + 5 \Rightarrow k = 2$$

$$s = 1 - 4 = -3$$

$$\text{Por tanto: } (-1, -9) = 2(-2, 3) - 3(-1, 5)$$

$$\vec{a} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$$

4. Consideramos los vectores $\vec{u}(0, 2)$ y $\vec{v}(1, \sqrt{3})$. Calcula:

a) Su producto escalar.

b) El módulo de ambos vectores.

c) El ángulo que forman.

$$a) \vec{u} \cdot \vec{v} = (0, 2) \cdot (1, \sqrt{3}) = 0 \cdot 1 + 2 \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$b) |\vec{u}| = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$$

$$c) \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{2\sqrt{3}}{2 \cdot 2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 30^\circ$$

5. Sea $\vec{u}(-3, k)$, calcula k de forma que:

a) \vec{u} sea ortogonal a $\vec{v}(4, -6)$.

b) El módulo de \vec{u} sea igual a 5.

a) El producto escalar de dos vectores ortogonales es igual a 0.

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (-3, k) \cdot (4, -6) = -12 - 6k = 0 \rightarrow k = -2$$

$$b) |\vec{u}| = \sqrt{9 + k^2} = 5 \rightarrow 9 + k^2 = 25 \rightarrow k = \pm 4$$

6. Determina las coordenadas de un vector $\vec{a}(x, y)$ que forme con el vector $\vec{v}(-1, 0)$ un ángulo de 60° y cuyo módulo sea 2.

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{v}}) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{-x}{2 \cdot 1} \rightarrow x = -1$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 + y^2} = 2 \rightarrow 1 + y^2 = 4 \rightarrow y^2 = 3 \rightarrow y = \pm\sqrt{3}$$

Hay dos soluciones para el vector \vec{a} : $\begin{cases} \vec{a}(-1, \sqrt{3}) \\ \vec{a}(-1, -\sqrt{3}) \end{cases}$

7. Obtén un vector $\vec{u}(x, y)$ ortogonal a $\vec{v}(8, 6)$ y cuyo módulo sea la mitad del de \vec{v} .

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad |\vec{v}| = \sqrt{64 + 36} = 10$$

$$(x, y) \cdot (8, 6) = 8x + 6y = 0$$

$$|\vec{u}| = \frac{1}{2} |\vec{v}| \rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 5 \rightarrow x^2 + y^2 = 25$$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} 8x + 6y = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{4}y \\ \frac{9}{16}y^2 + y^2 = 25 \end{cases} \rightarrow \frac{25}{16}y^2 = 25 \rightarrow y^2 = 16 \rightarrow y = \pm 4$$

$$y = 4 \rightarrow x = -3$$

$$y = -4 \rightarrow x = 3$$

Hay dos soluciones para \vec{u} : $\vec{u}(-3, 4)$; $\vec{u}(3, -4)$

- 8. Calcula la proyección de \vec{v} sobre \vec{u} , siendo $\vec{u}(2, 0)$ y $\vec{v}(-3, -1)$.**

$$\text{proy}_{\vec{u}} \vec{v} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|} = \frac{-6 + 0}{2} = -3$$

- 9. Sean \vec{a} y \vec{b} dos vectores unitarios que forman un ángulo de 120° .**

Calcula $|\vec{a} + \vec{b}|$ y $|\vec{a} - \vec{b}|$.

$$\begin{aligned} |\vec{a} + \vec{b}|^2 &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} = \\ &= |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) + |\vec{b}|^2 = 1 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = \\ &= 1 - 1 + 1 = 1 \rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\vec{a} - \vec{b}|^2 &= (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} = \\ &= |\vec{a}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) + |\vec{b}|^2 = 1 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = \\ &= 1 + 1 + 1 = 3 \rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3} \end{aligned}$$